55 Partie A

1.

```
u ← 5
Pour k variant de 1 à n
        u ← 0,5u + 0,5(k − 1) − 1,5
```

2.

```
u ← 5
S ← 5
Pour k variant de 1 à n
        u ← 0,5u + 0,5(k − 1) − 1,5
        S ← S + u
```

3. Pour $n = 5$, on a $S = 4{,}6875$.

Partie B

1. a. $u_0 = 5$, $u_1 = 1$, $u_2 = -0{,}5$, $u_3 = -0{,}75$ et $u_4 = -0{,}375$.
On considère la propriété $P(n) : u_n \leqslant u_{n+1}$.
• Initialisation. Pour $n_0 = 3$, $u_3 = -0{,}75$, $u_4 = -0{,}375$ et $-0{,}75 \leqslant -0{,}375$. Donc $P(3)$ est vraie.
• Hérédité. On considère un entier quelconque $k \geqslant 3$.
On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k \leqslant u_{k+1}$.
On veut démontrer que $P(k+1)$ est alors vraie.

$$\begin{aligned} u_k \leqslant u_{k+1} &\Leftrightarrow 0{,}5u_k \leqslant 0{,}5u_{k+1} \\ &\Leftrightarrow 0{,}5u_k + 0{,}5k \leqslant 0{,}5u_{k+1} + 0{,}5k \\ &\Leftrightarrow 0{,}5u_k + 0{,}5k - 1{,}5 \leqslant 0{,}5u_{k+1} + 0{,}5k - 1{,}5. \end{aligned}$$

Or $0{,}5u_{k+1} + 0{,}5k - 1{,}5 \leqslant 0{,}5u_{k+1} + 0{,}5(k+1) - 1{,}5$.
Ainsi, $0{,}5u_k + 0{,}5k - 1{,}5 \leqslant 0{,}5u_{k+1} + 0{,}5(k+1) - 1{,}5$
$\Leftrightarrow u_{k+1} \leqslant u_{k+2}$.
Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.
• Conclusion. La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 3$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 3$.

b. La suite (u_n) est croissante à partir du rang 3.

2. Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} = 0{,}1u_{n+1} - 0{,}1(n+1) + 0{,}5 &= 0{,}1(0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5) \\ &\quad - 0{,}1(n+1) + 0{,}5 = 0{,}05u_n - 0{,}05n + 0{,}25 \\ &= 0{,}5(0{,}1u_n - 0{,}1n + 0{,}5) = 0{,}5v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0{,}5$.
Le premier terme est $v_0 = 0{,}1 \times 5 - 0{,}1 \times 0 + 0{,}5 = 1$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $v_n = 1 \times 0{,}5^n = 0{,}5^n$.

3. On a $v_n = 0{,}1u_n - 0{,}1n + 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}1u_n = v_n + 0{,}1n - 0{,}5$
$\Leftrightarrow u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5$.

4.
$$\begin{aligned} S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n &= 10\left(\frac{1 - 0{,}5^{n+1}}{1 - 0{,}5}\right) + \frac{n(n+1)}{2} - 5(n+1) \\ &= 20\left(1 - 0{,}5^{n+1}\right) + \frac{n^2 - 9n - 10}{2}. \end{aligned}$$